Host; Conjecture de Furstenberg (1967)
Rudolph's theorem

μ une mesure sur $\mathbb{T}$ ergodique pour $\times 3$ et entropie > 0 pour $\times 2$

$T : x \longmapsto 2x \quad [1]$ ← mesure invariante (λ, δ_0)

$S : x \longmapsto 3x \quad [1]$ ← mesure invariante (λ, δ_0)

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i x} e^{2\pi i 3x} e^{2\pi i 3^2 x} \cdots e^{2\pi i 3^k x}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i x(1+3+\cdots+3^k)}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i x \left(\frac{3^{k+1}-1}{2}\right)}$$

$e^{\pi i x}$ n'est pas définie sur le tore 0 et 1

$$\psi_N(x) = \varphi_N(2x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{4\pi i x \frac{3^{k+1}-1}{2}}$$

$$= e^{-2\pi i x} \times \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i x 3^{k+1}} \longrightarrow e^{-2\pi i x} \hat{\mu}(1) \text{ p.s}$$

$$\psi_N\left(x+\frac{1}{2}\right) = \varphi_N(2x+1) = \psi_N(x) \longrightarrow e^{-2\pi i x} \hat{\mu}(1) \text{ p.s.}$$

$$A = \{x : \psi_N(x) \longrightarrow e^{-2\pi i x} \hat{\mu}(1)\}$$

si $x \in A$: $\psi_N(x) \longrightarrow e^{-2\pi i x} \hat{\mu}(1)$

et si en plus $x+\frac{1}{2} \in A$ Rudolph's theorem

$$\psi_N(x+\tfrac{1}{2}) \longrightarrow e^{-i\pi} e^{-2\pi i x} \hat{\mu}(1)$$

$\Rightarrow$ si $A \cap A+\frac{1}{2} \neq \emptyset$

$$\hat{\mu}(1) = 0$$

entropie positive pour $\times 2$

$\Rightarrow$ $\mu(A \cap (A+\frac{1}{2})) > 0$ car $\mu(A)=1$

$\boxed{h(T)} > 0$

$\boxed{\cancel{e^{2\pi i x} = y}}$

$\mathcal{P} = \{A, B\}$; T n'est pas injective

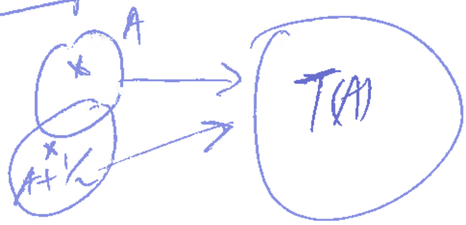
$$T\mathcal{P} = \{TA, TB\}$$

$$\mathcal{A} = \bigvee_{0}^{+\infty} T^{i}\mathcal{P}$$

si T injective $T\mathcal{P} \subset \bigvee_{1}^{+\infty} T^{-i}\mathcal{P}$ $\leftarrow$

$$E\left(T\mathcal{P} \,\middle|\, \bigvee_{0}^{+\infty} T^{-i}\mathcal{P}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ Contradict. $T_x = T_{x'}$ Si $A \cap A+\frac{1}{2} = \emptyset$



$\mu(A) = 1$

$\mu(A+\frac{1}{2}) = 0$